

Pavages substitutifs et planaires

Les pavages Sub Rosa ne sont pas planaires

Victor Hubert LUTFALLA

Thomas FERNIQUE and Jarkko KARI

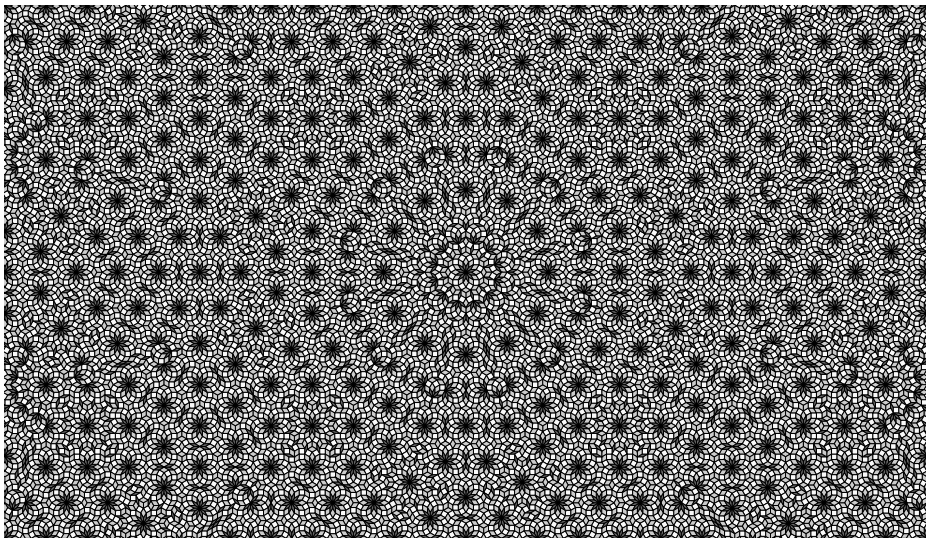


2020

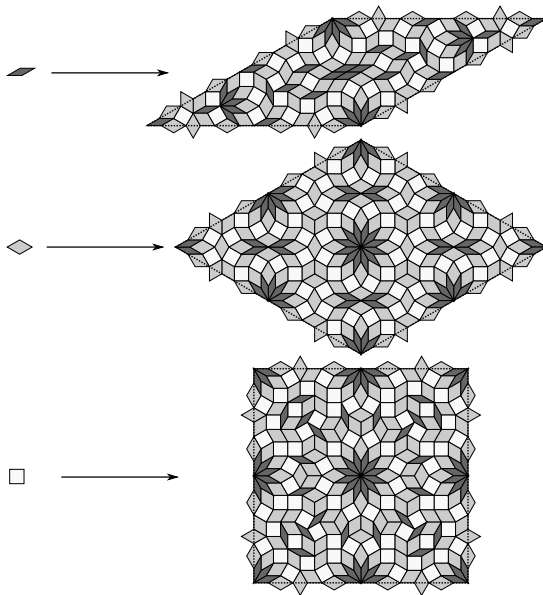
<https://lipn.univ-paris13.fr/~lutfalla/documents/>

- 1 Le pavage Sub Rosa 6
- 2 Théorèmes sur les pavages substitutifs et planaires
- 3 Schéma de preuve
- 4 Conclusion

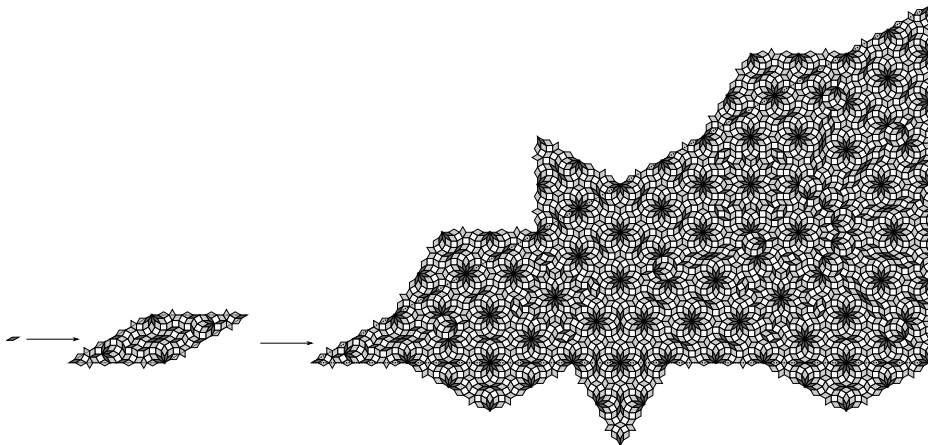
Pavage Sub Rosa 6 et propriétés



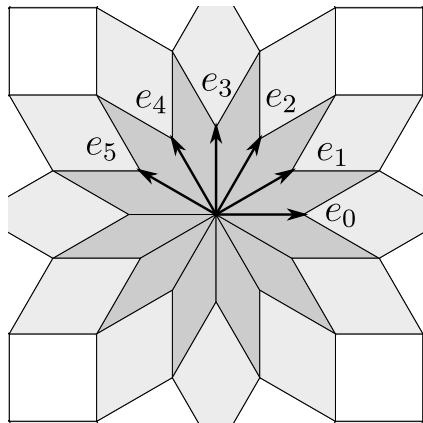
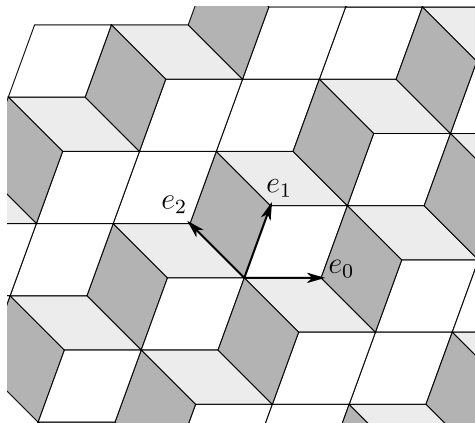
Substitution $\sigma(6)$



Métatuiles de $\sigma(6)$



Relèvement et planarité



Résultats

Les pavages Sub Rosa sont des pavages substitutifs avec symétrie rotationnelle d'ordre n définis dans [Kari and Rissanen, 2016].

Théorème (Fernique, Kari, L.)

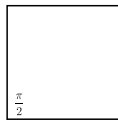
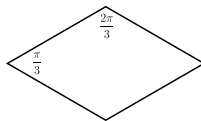
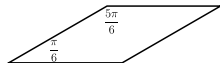
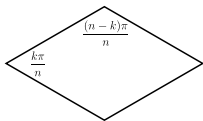
Les pavages Sub Rosa n , pour $n \notin \{2, 3, 5\}$, ne sont pas planaires.

Théorème (Fernique, Kari, L.)

Pour tout entier n il existe un pavage substitutif et planaire avec symétrie rotationnelle d'ordre n .

Dans la suite je vais présenter les éléments de preuve du premier résultat.

Tuiles pour le n -fold avec n pair

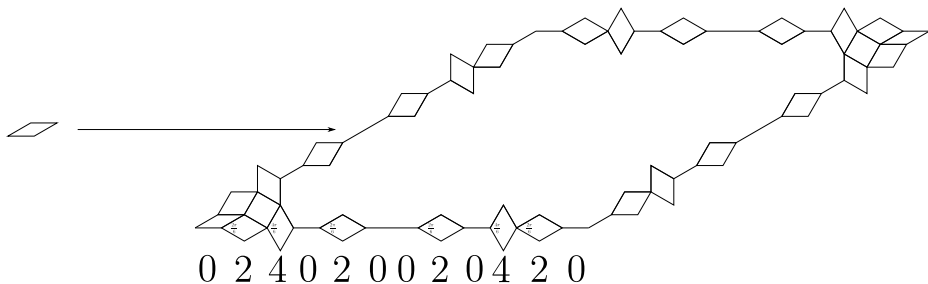


Construction [Kari and Rissanen, 2016]

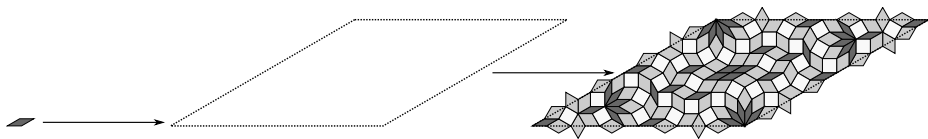
La substitution $\sigma(n)$ est définie par son bord $\Sigma(n)$, avec $s(n) = 024 \dots (n-2)$.

$$\Sigma(n) = s(n) \cdot \overline{s(2)} \cdot \overline{s(4)} \dots \overline{s(n-2)} \mid s(n-2) \dots s(4) \cdot s(2) \cdot \overline{s(n)}$$

$$[\Sigma(n)] = (n, n-2, n-4, \dots, 4, 2)$$

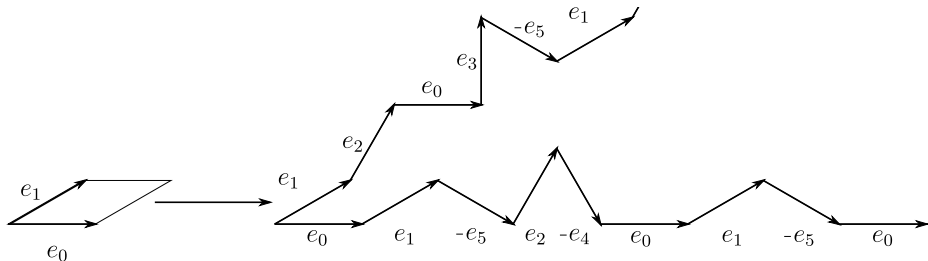


Expansion et subdivision



L'expansion $\varphi(n)$ relevée dans $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire.

Expansion et application linéaire



L'expansion $\varphi(n)$ est une application linéaire pseudo-circulante déterminée par le nombre d'arêtes et de losanges sur le bord des métatuiles $[\Sigma(n)]$.

$$\varphi(6) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 4 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Décomposition de $\varphi(6)$

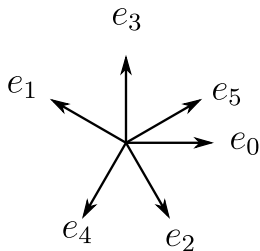
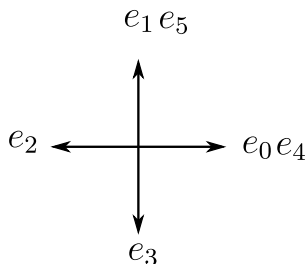
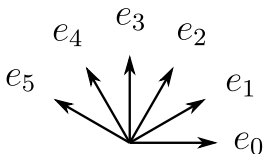
$$\begin{aligned}
\varphi(6) &= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 4 & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
&= 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 6 \cdot M_0(6) + 4 \cdot M_1(6) + 2 \cdot M_2(6)
\end{aligned}$$

Décomposition de $\mathbb{R}^n$ en espaces propres

$$\mathbb{R}^6 = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 = \left\langle \left(e^{i \frac{k\pi}{6}} \right) \right\rangle \oplus \left\langle \left(e^{i \frac{k\pi}{2}} \right) \right\rangle \oplus \left\langle \left(e^{i \frac{5k\pi}{6}} \right) \right\rangle$$

$\mathcal{E}_0$ est la pente du pavage, c'est un espace propre dilatatant.

Les autres $\mathcal{E}_i$ sont les espaces propres de l'expansion, pour que l'expansion soit planaire on veut des valeurs propres < 1 .



$$\mathbb{R}^n = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \dots \mathcal{E}_{\frac{n}{2}-1} = \bigoplus_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \mathcal{E}_i \quad \mathcal{E}_i = \left\langle \left(e^{i \frac{(2i+1)k\pi}{n}} \right) \right\rangle$$

Matrices élémentaires et valeurs propres

$$\varphi(6) = 6 \cdot M_0(6) + 4 \cdot M_1(6) + 2 \cdot M_2(6) \quad \varphi(n) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} [\Sigma(n)]_i M_i(n)$$

$M_0(n) = Id_n$ a les $\mathcal{E}_j$ pour espaces propres avec valeur propre $\lambda_{0,j}(n) = 1$

$$M_1(6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2(6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_i(n)$ matrice pseudo-circulante avec valeur 1 pour la diagonale i , et -1 pour la diagonale $n - i$
 $M_i(n)$ admet les espaces $\mathcal{E}_j$ pour espaces propres avec valeur propre $\lambda_{i,j}(n) = 2 \cos \left(\frac{(2j+1)i\pi}{n} \right)$.

Valeurs propres

$\varphi(n)$ admet donc les espaces $\mathcal{E}_j$ pour espaces propres avec les vp $\lambda_j(n) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} [\Sigma(n)]_i \lambda_{i,j}(n)$

$$\lambda_0(6) = 6 + 8 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 14,93$$

$$\lambda_1(6) = 6 + 8 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4 \cos(\pi) = 2$$

$$\lambda_2(6) = 6 + 8 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 4 \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) \approx 1.07$$

Avec $[\Sigma(n)]_i = n - 2i$ et $\lambda_{i,j}(n) = 2 \cos\left(\frac{(2j+1)i\pi}{n}\right)$ pour $i > 0$ et $\lambda_{0,j}(n) = 1$ ça donne

$$\lambda_j(n) = n + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (n - 2i) \cdot 2 \cos\left(\frac{(2j+1)i\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right)}$$

En particulier $\lambda_j(n)$ est croissante en fonction de n et à j fixé.

Valeurs

Pour tout entier pair $n \geq 4$,

$$\lambda_0(n) > \lambda_0(4) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} \approx 6.83 > 1 \Rightarrow \text{strictement dilatant sur } \mathcal{E}_0$$

$$\lambda_1(n) > \lambda_1(4) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)} \approx 1.17 > 1 \Rightarrow \text{strictement dilatant sur } \mathcal{E}_1$$

Théorème (Fernique, Kari, L.)

Les pavages Sub Rosa n , pour $n \notin \{2, 3, 5\}$, ne sont pas planaires.

La preuve est similaire pour n impair.

Pour n impair il y a un preprint sur arxiv.

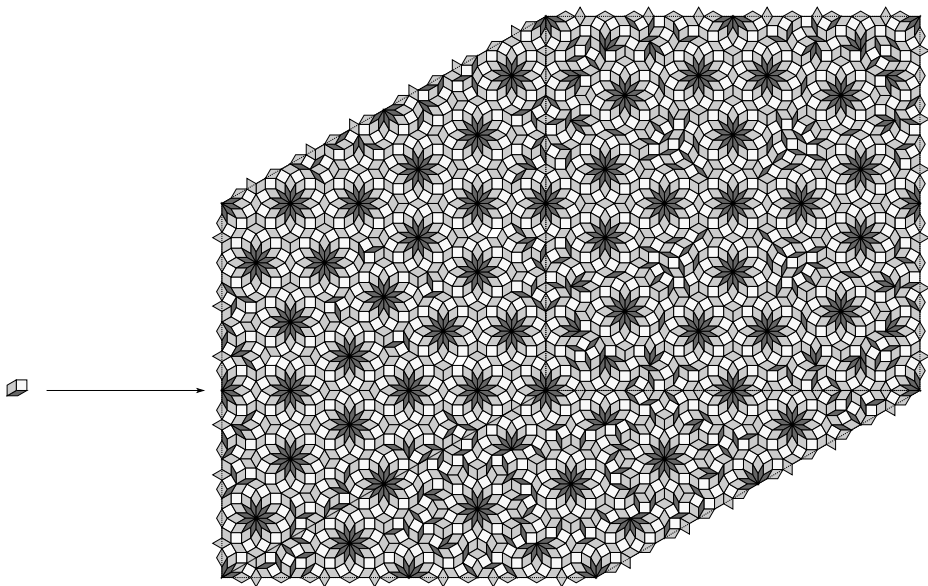
Résultats bis

Théorème (Fernique, Kari, L.)

Pour tout entier n il existe un pavage substitutif et planaire avec symétrie rotationnelle d'ordre n .

- On utilise la même façon de relever les pavages et substitutions dans $\mathbb{R}^n$, il y a le même lien entre nombre de losanges sur le bord des substitutions et valeurs propres de l'expansion.
- On peut traduire la contrainte de planarité en contrainte sur les proportions des losanges sur le bord.
- Premier problème: définir une expansion qui respecte les contraintes de planarité
- Second problème: définir la substitution à partir de l'expansion (donc le bord des métatuiles), c'est un problème de pavabilité assez compliqué.

Substitution planaire pour $n = 6$



Perspectives

- La Révolution : demain tou-te-s dans la rue!
- Pour les pavages substitutifs et planaires que j'ai évoqué: sont-ils coupe-et-projection ?
- Quelle est la complexité de ces pavages ?
- Caractérisation plus générale des pavages substitutifs et planaires: en particulier caractérisation des pentes atteignables.



Kari, J. and Rissanen, M. (2016).

Sub rosa, a system of quasiperiodic rhombic substitution tilings with n -fold rotational symmetry.

Discrete & Computational Geometry, 55(4):972–996.